2Д

УДК 004.272.2:519.63

О.А. Дмитриева
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83000, г. Донецк, ул. Артема, 58

Разработка и обоснование устойчивости параллельных методов моделирования динамических систем с введением коллоцирования на шаге

O.A. Dmitrieva
Donetsk National Technical University, Ukraine
Ukraine, 83000, c. Donetsk, st. Artema,58

Development and Argumentation of the Sustainability of Parallel Methods of Dynamic Systems Simulation with the Collocation Step Introduction

О.А. Дмитрієва
Донецький національний технічний університет, Україна
Україна, 83000, м. Донецьк, вул. Артема, 58

Розробка й обґрунтування стійкості паралельних методів моделювання динамічних систем із введенням колоціювання на кроці

В статье рассматриваются вопросы разработки численных методов моделирования динамических систем с сосредоточенными параметрами. Основное внимание уделено доказательству устойчивости методов по начальным данным и по правой части, для тестовых примеров приведены области устойчивости. Выполнен сравнительный анализ порядков аппроксимации разработанных методов по отношению к порядкам классических стадийных методов. Разработан математический аппарат, позволяющий генерировать коэффициенты расчетных схем для произвольного количества стадий на шаге, в том числе, с неравномерным расположением стадийных точек.
Ключевые слова: динамическая система, стадийные точки, устойчивость, аппроксимация, коллоцирование, параллельные вычисления.

This article discusses the development of numerical methods of simulation of dynamic systems with lumped parameters. The emphasis is placed on the proof of the sustainability of the method on the initial data and on the right-hand side, the stability domains are used as test examples. A comparative analysis of the orders of approximation of the developed methods has been conducted in relation to the orders of the classical stage methods. A mathematical tool has been developed that allows one to generate the coefficients of the calculation schemes for an arbitrary number of stages on a step, including a non-uniform arrangement of stage points.
Keywords: dynamical system, stage points, stability, approximation, collocation, parallel computing.

У статті розглядаються питання розробки чисельних методів моделювання динамічних систем із зосередженими параметрами. Основну увагу приділено доказу стійкості методів за початковими даними й по правій частині, для тестових прикладів наведено області стійкості. Виконано порівняльний аналіз порядків апроксимації розроблених методів стосовно порядків класичних стадійних методів. Розроблено математичний апарат, що дозволяє генерувати коефіцієнти розрахункових схем для довільної кількості стадій на кроці, у тому числі, з нерівномірним розташуванням стадійних точок.
Ключові слова: динамічна система, стадійні точки, стійкість, апроксимація, колоціювання, паралельні обчислення.

В настоящее время ведутся интенсивные исследования в направлении создания математических методов организации эффективных параллельных вычислений, разработки параллельных алгоритмов решения задач различных классов, а также разработки методов и программных средств автоматического распараллеливания программ для многопроцессорных систем различных архитектур. От эффективности математических и алгоритмических методов организации параллельных вычислений в значительной степени зависит разработка и создание прикладного программного обеспечения и, в конечном счете, эффективность применения этих систем при решении сложных научно-технических задач больших размерностей [1-3]. Этим фактом объясняется и современное состояние разработок и исследований в области моделирования динамических объектов. В качестве методов, обеспечивающих массовый параллелизм при численном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f(t,x(t)), \quad x(t_0) = x_0, t \in [t_0,T], \tag{1}$$

в работе предлагается использование коллокационных стадийных методов со старшими производными, которые обеспечивают эффективную параллельную реализацию расчетных схем и управление шагом интегрирования [4], [5].

Целью работы является обобщение полученных в [6-9] результатов, связанных с введением коллоцирования и использованием для определения расчетных коэффициентов разностных схем интерполяционных многочленов с кратными узлами типа Эрмита, получение показателей устойчивости и определение порядков аппроксимации построенных методов.

Для определения оценки погрешности коллокационных методов со старшими производными с введением точек коллокации на шаге используются расчетные схемы вида

$$x_{n+1} = x_n + \tau_n \sum_{i=1}^{s} \sum_{l=0}^{p_i} \tau_n^l b_i^{(l)} f^{(l)}(t_n + c_i \tau_n, k_i), \tag{2}$$

$$k_i = x_n + \tau_n \sum_{i=1}^{s} \sum_{l=0}^{p_i} \tau_n^l a_{ij}^{(l)} f^{(l)}(t_n + c_j \tau_n, k_j), \quad i = 1,2,...,s,$$

где $f^{(l)}(t_n + c_i \tau_n, k_i)$ – l-ая производная правой части, вычисленная в точке $t_n + c_i \tau_n$, $\left(f^{(0)}(t_n + c_i \tau_n, k_i) = f(t_n + c_i \tau_n, k_i)\right)$.

$a_{ij}^{(l)}$, $b_i^{(l)}$ – элементы соответствующих матриц и векторов схемы Батчера, которая из классического варианта приводится модифицированному виду [8]. Элементы стадийного вектора c_i, $i = 1,2,...,s,$ как правило, задаются. А элементы матрицы $a_{ij}^{(l)}$ и вектора $b_i^{(l)}$ находятся из соотношений.

Оценка погрешности параллельных методов с введением точек коллокации на шаге

Погрешность аппроксимации при $\tau_n \to 0$ будет зависеть от выбора точек коллокации. В разложениях для сокращения записей положим $t_n = 0, x_n = x_0$ и сформируем выражение для невязки

$$r_{n+1} = u_{n+1} - x(t_{n+1}). \tag{3}$$

При этом необходимо исходить из того, что все рассматриваемые функции обладают требуемой гладкостью. Из выражений невязки разностных методов можно получить формулы для главных членов погрешностей на шаге

$$r_{n+1} = Cx^{(m+1)}(t_n, x_n)\tau_n^{m+1} + O(\tau_n^{m+1}).$$

Для проверки аппроксимации коллокационных формул вида (3) необходимо, задавшись точками коллокации, сгенерировать расчетную схему, а затем найти невязки уравнений, составляющих указанные системы, и разложить их в ряд Тейлора в окрестности искомого решения. Порядок невязки в точке $t_n + \tau_n$ определяет порядок аппроксимации схемы в целом.

Для исследования выбирались схемы с равномерным и произвольным расположением узлов коллокации. Так, для метода с точками коллокации

$$\{t_n + \tau_n / 3, t_n + 2\tau_n / 3, t_n + \tau_n\}$$

и с заданными в них первыми производными (рис. 1) система разностных уравнений представляется в виде:

$$u_{n+1/3} = u_n + \tau_n\left(\frac{38}{45}f_{n+\frac{2}{3}} - \frac{949}{720}f_{n+\frac{1}{3}} + \frac{581}{720}f_{n+1}\right) - \frac{\tau_n^2}{2160}\left(637f'_{n+\frac{1}{3}} + 4320f'_{n+\frac{2}{3}} + 173f'_{n+1}\right),$$

$$u_{n+2/3} = u_n + \frac{\tau_n}{45}\left(46f_{n+\frac{2}{3}} - 53f_{n+\frac{1}{3}} + 37f_{n+1}\right) - \tau_n^2\left(\frac{13}{45}f'_{n+\frac{1}{3}} + \frac{14}{27}f'_{n+\frac{2}{3}} + \frac{11}{135}f'_{n+1}\right), \qquad (4)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\tau_n}{80}\left(96f_{n+\frac{2}{3}} - 93f_{n+\frac{1}{3}} + 77f_{n+1}\right) - \frac{\tau_n^2}{80}\left(23f'_{n+\frac{1}{3}} + 160f'_{n+\frac{2}{3}} + 7f'_{n+1}\right).$$

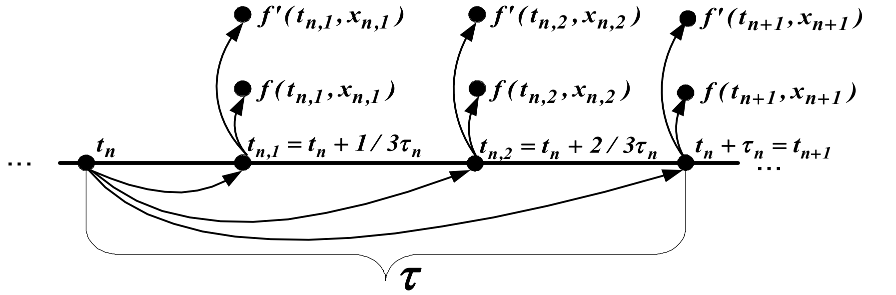


Рисунок 1 – Шаблон разностной схемы коллокационного 3-стадийного метода с равноотстоящими узлами и первыми производными

Для определения порядка аппроксимации системы разностных уравнений (4) необходимо построить разложение в ряд Тейлора точного решения во всех стадийных точках, правых частей, используемых в расчетных схемах для соответствующих точек, и всех требуемых производных правых частей. Невязки по соответствующим уравнениям системы (4) примут вид:

$$r(t_n + \tau_n / 3) = -\frac{53x^{(7)}(t_n)\tau_n^7}{10333575} + O[\tau_n]^8,$$

$$r(t_n + 2\tau_n / 3) = -\frac{107x^{(7)}(t_n)\tau_n^7}{20667150} + O[\tau_n]^8,$$

$$r(t_n + \tau_n) = -\frac{2x^{(7)}(t_n)\tau_n^7}{382725} + O[\tau_n]^8.$$

Из полученных соотношений видно, что коллокационный метод с первыми производными правых частей (4) аппроксимирует исходную задачу (1) с седьмым порядком в то время, как коллокационный метод без старших производных дает только четвертый порядок аппроксимации [10].

Увеличение количества точек коллокации в расчетной схеме способствует повышению порядка аппроксимации. Так для схемы с точками коллокации

$$\left\{t_n+\tau_n/4,\, t_n+\tau_n/2,\, t_n+3\tau_n/4,\, t_n+\tau_n\right\}$$

и с заданными в них первыми производными невязки по уравнениям представимы как

$$r(t_n+\tau_n/4)=-\frac{74023x^{(9)}(t_n)\tau_n^9}{6658877030400}+O\left[\tau_n\right]^{10},$$

$$r(t_n+\tau_n/2)=-\frac{2323x^{(9)}(t_n)\tau_n^9}{208089907200}+O\left[\tau_n\right]^{10},$$

$$r(t_n+3\tau_n/4)=-\frac{919x^{(9)}(t_n)\tau_n^9}{82208358400}+O\left[\tau_n\right]^{10},$$

$$r(t_n+\tau_n)=-\frac{73x^{(9)}(t_n)\tau_n^9}{6502809600}+O\left[\tau_n\right]^{10}.$$

Полученные соотношения позволяют утверждать, что четырехстадийный коллокационный метод с первыми производными правых частей дает девятый порядок точности при аппроксимации исходной задачи, а коллокационный классический метод на таких же стадийных точках без старших производных дает только пятый порядок [8], [10]. Таким образом, увеличивая порядок производных, входящих в расчетные схемы (2), можно генерировать методы, имеющие более высокий порядок аппроксимации по сравнению с методами, полученными при использовании классических коллокационных методов. Так, повышение порядка производных правых частей на единицу в s стадийных точках, позволяет на тех же точках коллокации получить приращение порядка на s единиц. Вовлечение в расчетную схему производных более высокого порядка сохраняет зависимости. Так для системы разностных уравнений с первыми и вторыми производными правых частей невязка в точке $t_n+\tau_n$

$$r(t_n+\tau_n)=-\frac{17x^{(10)}(t_n)\tau_n^{10}}{105815808000}+O\left[\tau_n\right]^{11}$$

обеспечивает десятый порядок аппроксимации, что намного выше, чем при введении дополнительной коллокационной точки.

Устойчивость и сходимость коллокационных методов со старшими производными

Коллокационные методы, определяющиеся соотношениями (2) и использующие старшие производные в точках коллокации, введенные на шаге, всегда устойчивы по начальным данным. Это свойство устойчивости объясняется тем фактом, что при решении однородной системы, у которой $F_{n+j}=f(t_{n+j},u_{n+j})=0,\ j=1,2,...,s,$ со-

отношения для определения значений $u_{n+j} = u(t_n + c_j\tau_n), j = 1,2,...,s$ приближенного решения задачи Коши (1) вида

$$u_{n+j} = u_n + \sum_{i=1}^{s}\sum_{l=1}^{p_i}\tau_n^l a_{ij}^{(1)} F_{n+i}^{(l-1)}, \; j = 1,2,...,s, \quad (5)$$

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{i=1}^{s}\sum_{l=1}^{p_i}\tau_n^l b_i^{(1)} F_{n+i}^{(l-1)}.$$

можно будет записать как

$$u_{n+j} = u(t_n + c_j\tau_n) = u_n, \; j = 1,2,...,s, \quad (6)$$

что обеспечивает равномерную ограниченность по n.

Для исследования устойчивости по правой части вводится модельное одномерное уравнение вида

$$x' = \lambda x, \;\; t > 0, \quad (7)$$

где λ – комплексное число ($\lambda < 0$).

Этот вид модельного уравнения широко используется для анализа устойчивости численных методов решения дифференциальных уравнений [11]. При этом численное решение модельного уравнения находится в виде

$$u_{n+1} = Mu_n,$$

или

$$u_{n+1} = M^{n+1}u_0,$$

а устойчивость решения при $u_{n+1} \to 0, \;\; n \to \infty$ гарантируется при условии $|M| < 1$. Метод считается A-устойчивым, если границей области устойчивости метода в комплексном пространстве является мнимая ось, и $A(\alpha)$– устойчивым, если область его устойчивости содержит угол $|arg(-\mu)| < \alpha, \;\; \mu = \lambda\tau_n$ [11], [12]. Для рассматриваемых методов, содержащих старшие производные в s стадийных точках (2), построим функцию устойчивости M. Определим правую часть уравнения в соответствии с (7) $F_{n+j} = f(t_{n+j}, u_{n+j}) = \lambda u_{n+j}$ и построим следующую систему уравнений, введя замену $\mu = \lambda\tau_n$:

$$u_{n+c_j\tau_n} = u_n + \mu\sum_{i=1}^{s} a_{i,j}^{(0)} u_{n+c_i\tau_n} + \mu\tau_n\sum_{i=1}^{s} a_{i,j}^{(1)}, \; j=1,2,...,s,$$

$$u_{n+1} = u_n + \mu\sum_{i=1}^{s} b_i^{(0)} u_{n+c_i\tau_n} + \mu\tau_n\sum_{i=1}^{s} b_i^{(1)}.$$

Представим систему в виде

$$-\mu\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}^{(0)} u_{n+c_i\tau_n} + u_{n+c_j\tau_n}\left(1 - \mu a_{i,j}^{(0)}\right) - \mu\sum_{i=j+1}^{s} a_{i,j}^{(0)} u_{n+c_i\tau_n} = u_n + \mu\tau_n\sum_{i=1}^{s} a_{i,j}^{(1)}, \; j=1,2,...,s, \, i \neq j,$$

$$u_{n+1} - \mu\sum_{i=1}^{s} b_i^{(0)} u_{n+c_i\tau_n} = u_n + \mu\tau_n\sum_{i=1}^{s} b_i^{(1)}. \quad (8)$$

Поскольку суммы коэффициентов метода представляют собой постоянные величины, введем замены

$$\tau_n\sum_{i=1}^{s} a_{i,j}^{(1)} = C_j < 1, \quad j = 1,2,...,s, \quad \tau_n\sum_{i=1}^{s} b_j^{(1)} = c < 1.$$

Тогда в матричной форме система уравнений (8) будет иметь вид

$$\left(E-\mu A^{(0)}\right)U=u_n e+\mu C, \tag{9}$$

$$-\mu b^{(0)T}U+u_{n+1}=u_n e+\mu c,$$

где

$$U=\left(u_{n,j}\right)^T,\quad A^{(0)}=\left(a_{ij}^{(0)}\right),\quad e=\left(1,1,...,1\right)^T,\quad C=\left(C_j\right)^T,\quad b^{(0)T}=\left(b_1^{(0)},b_2^{(0)},...,b_s^{(0)}\right).$$

Систему (9) представим в виде

$$\begin{pmatrix} E-\mu A^{(0)} & 0 \\ -\mu b^{(0)T} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ u_{n+1} \end{pmatrix}=u_n\begin{pmatrix} G \\ g \end{pmatrix}.$$

Функцией устойчивости метода будет отношение вида

$$Q(\mu)=\frac{u_{n+1}}{u_n}, \tag{10}$$

которое для нашего случая запишется в виде дробно-рациональной функции

$$Q(\mu)=\frac{Det\left(\left(E-\mu A\right)g+\mu b^{(0)T}G\right)}{Det\left(E-\mu A\right)}.$$

Теперь для сгенерированных разностных коллокационных схем, содержащих старшие производные, можно определить области устойчивости. Для модельного уравнения (7) запишем разностные уравнения коллокационного метода с первыми производными правых частей (4) и получим следующие зависимости

$$u_{n+\tau_n/3}=\frac{-2\left(75-35\mu+6\mu^2\right)u_n}{-150+100\mu-29\mu^2+4\mu^3},$$

$$u_{n+2\tau_n/3}=\frac{\left(-150-20\mu+3\mu^2\right)u_n}{-150+100\mu-29\mu^2+4\mu^3},$$

$$u_{n+\tau_n}=\frac{-2\left(75+25\mu+2\mu^2\right)u_n}{-150+100\mu-29\mu^2+4\mu^3}.$$

В соответствии с (10) можно найти выражения для $Q_i(\mu)$:

$$Q_1(\mu)=\frac{-2\left(75-35\mu+6\mu^2\right)}{-150+100\mu-29\mu^2+4\mu^3},$$

$$Q_2(\mu)=\frac{\left(-150-20\mu+3\mu^2\right)}{-150+100\mu-29\mu^2+4\mu^3},$$

$$Q_3(\mu)=\frac{-2\left(75+25\mu+2\mu^2\right)}{-150+100\mu-29\mu^2+4\mu^3}.$$

Для оценки устойчивости разрабатываемых методов был разработан программный продукт, обеспечивающий как исследование собственных значений, так и визуализацию границ областей устойчивости. Построим (рис. 2) области устойчивости полученных функций для разностного метода (4), покажем, что метод является

$A(\alpha)-$ устойчивым, и найдем значение α. Проведем касательную к границе области устойчивости, проходящую через начало координат, при этом величина угла $\alpha = 88.09084756700362°$.

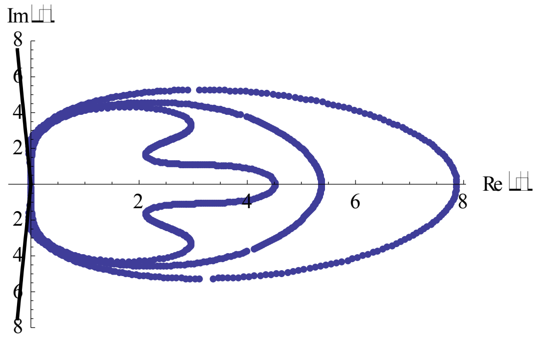


Рисунок 2 – Границы области устойчивости неявного коллокационного метода (4)

Аналогично можно проверить устойчивость коллокацонных методов с большим числом стадий, например для четырехстадийного коллокационного метода с первыми производными правых частей. Область устойчивости этого метода приведена на рис. 3, из которого видно, что, как и в предыдущем случае, метод является $A(\alpha)-$ устойчивым со значением $\alpha = 86.18592516570965°$. Для двухстадийного метода с первыми и вторыми производными правых частей границы области устойчивости приведены на рис. 4. Значение α для этого $A(\alpha)-$ устойчивого метода составляет $\alpha = 88.45184230102204°$.

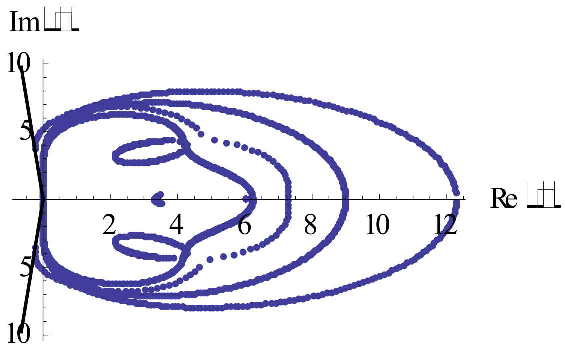


Рисунок 3 – Границы области устойчивости четырехстадийного коллокационного метода с первыми производными правых частей

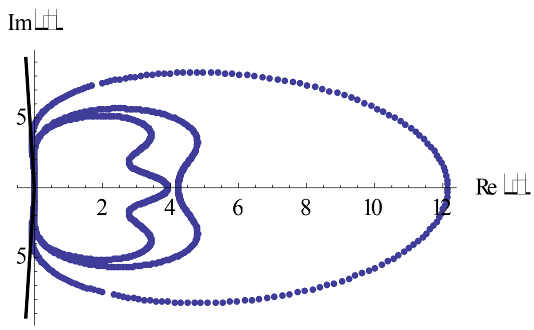


Рисунок 4 – Границы области устойчивости двухстадийного метода с первыми и вторыми производными правых частей

Таким образом, можно утверждать, что неявные коллокационные методы с введением точек коллокации на шаге и со старшими производными являются $A(\alpha)$-устойчивыми с высокими показателями значений α, близкими к $90°$, и могут быть использованы при решении жестких систем. Если оценивать временную сложность модификации коллокационных методов, то повышение точности за счет введения дополнительной коллокационной точки приводит к увеличению размерности системы на одно уравнение, а повышение точности за счет увеличения на одну единицу порядка производных приводит к необходимости проведения дополнительной итерации, что гораздо предпочтительнее. Выбор точек коллокации на отрезке аппроксимации $(t_n, t_n + \tau_n)$ может осуществляться неравномерно, т.е. фактически, можно подобрать точки коллокации, расположение которых будет соответствовать расположению стадийных точек известных методов, но при этом введение в расчетные схемы производных высоких порядков позволяет значительно повысить порядок точности метода, не увеличивая при этом число стадий.

Список литературы

1. Networking and Information Technology Research and Development. [Электронный ресурс] // Report by the Subcommittee on Networking and Information Technology Research and Development National Science and Technology Council. – 2012. – Режим доступа: http://www.nitrd.gov/pubs/2012 supplement/FY12NITRD Supplement.pdf.
2. FOSER - Future of Software Engineering Research Workshop. [Электронный ресурс] // Reports Federally Funded Research and Development in Networking and Information Technology. – 2011. – Режим доступа: http://www.nitrd.gov/SUBCOMMITTEE/sdp/foser/FOSER+December+ 2011.pdf&pli=1
3. The Networking and Information Technology Research and Development Program fy 2013. [Электронный ресурс] // Reports National Coordination Office for Networking and Information Technology Research and Development. – 2013. – Режим доступа: http://www.nitrd.gov/pubs/2013 supplement/FY13NITRD Supplement.pdf.
4. Дмитриева О.А Параллельное моделирование динамических объектов с автоматическим выбором шага на основе экстраполяционных методов / О.А Дмитриева // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2012. – № 6 (58). – С. 312-317.
5. Дмитриева О.А. Высокоэффективные алгоритмы управления шагом на основе параллельных коллокационных блочных методов / О.А. Дмитриева // Искусственный интеллект. – 2012. – № 4. – С. 77-88.
6. Дмитриева О.А. О модификации многошаговых коллокационных блочных методов при параллельном моделировании динамических объектов / О.А. Дмитриева // Системы обработки информации. – 2013. – № 14(177). – С. 121-126.
7. Дмитриева О.А Разработка многошаговых параллельных коллокационных блочных методов с использованием интерполяционных полиномов Эрмита / О. А. Дмитриева // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2013. – № 5 (64). – С. 243-249.
8. Дмитриева О.А. О введении производных высших порядков в параллельные коллокационные методы решения задачи Коши / О.А. Дмитриева // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Системний аналіз та інформаційні технології у науках про природу та суспільство» (САІТ-2012). Випуск 2. – Донецьк : ДонНТУ. – 2012. – №1(2) – 2(3). – С. 69-74
9. Дмитриева О.А Управление шагом интегрирования при параллельной реализации обобщенных коллокационных блочных методов / О.А Дмитриева // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2014. – № 5 (69). – С. 119-123.
10. Dmitrieva O. Parallel Algorithms of Simulation. Increase of simulation of dynamic objects with the lumped parameters into parallel computer systems / O. Dmitrieva, A. Firsova. – Lambert Academic Publishing, 2012. – 192 p. – ISBN-13: 978-3-659-28540-0, ISBN-10: 3659285404.
11. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М. : Мир, 1999. – 685 с.
12. Дмитрієва О.А. Паралельні різницеві методи розв'язання задачі Коші / Дмитрієва О.А. – Донецьк : ДонНТУ, 2011. – 265 с.

References

1. Networking and Information Technology Research and Development. [Электронный ресурс] // Report by the Subcommittee on Networking and Information Technology Research and Development National Science and Technology Council. – 2012. – Режим доступа:
2. http://www.nitrd.gov/pubs/2012supplement/FY12NITRD Supplement.pdf.
3. FOSER - Future of Software Engineering Research Workshop. [Электронный ресурс] // Reports Federally Funded Research and Development in Networking and Information Technology. – 2011. – Режим доступа: http://www.nitrd.gov/SUBCOMMITTEE/sdp/foser/FOSER+December+2011.pdf &pli=1
4. The Networking and Information Technology Research and Development Program fy 2013. [Электронный ресурс] // Reports National Coordination Office for Networking and Information Technology Research and Development. – 2013. – Режим доступа: http://www.nitrd.gov/pubs/ 2013supplement/FY13NITRD Supplement.pdf.
5. Dmitrieva O. A. Iskusstvennyj intellect. 2012. № 4. S. 77–88.
6. Dmitrieva O. A. Radioelektronnye i komp'yuternye systemy. – 2012. – № 6 (58). – S. 312–317.
7. Dmitrieva O. A. Systemy obrabotki informatsii. – 2013. – № 14 (177). – S. 121–126.
8. Dmitrieva O. A. Radioelektronnye i komp'yuternye systemy. – 2013. – № 5 (64). – S. 243–249.
9. Dmitrieva O. A. SAIT. – 2012. – № 1 (2) – 2(3). – S. 69–74.
10. Dmitrieva O. A. Radioelektronnye i komp'yuternye systemy. – 2014. – № 5 (69). – S. 119–123.
11. Dmitrieva O., Firsova A. Parallel Algorithms of Simulation. Increase of simulation of dynamic objects with the lumped pa rameters into parallel computer systems. – Lambert Academic Publishing, 2012. – 192 p.
12. Hayrer E., Wanner. G. Solution of ordinary differential equations. Tough task. – Springer–Verlag, 1999. – 685 s.
13. Dmitrieva O.A. Parallel differential methods of the solution of Cauchy problem. – DonNTU, 2011. – 265 s.

RESUME

O.A. Dmitrieva

Development And Argumentation of the Sustainability of Parallel Methods of Dynamic Systems Simulation with the Collocation Step Introduction

The paper is focused on the development of methods of simulation of dynamic objects with lumped parameters, which are described by systems of ordinary differential equations of large dimension. As the initial methods the collocation stage methods are used in which to improve the order of approximation higher-order derivatives have been introduced. The structure of the difference schemes allows one to find solutions on stages in parallel, in addition to that the process of the integration step control can be integrated in the calculation scheme which allows the use of methods for solving stiff systems of equations. The main attention is paid to the proof of the stability of the developed methods on the initial data and on the right-hand side, for the test examples the stability domains are given. A comparative analysis of the orders of approximation of the developed methods has been conducted in relation to the orders of the classical stage methods. A significant advantage of the proposed approach is shown, as increase of accuracy due to the introduction of the additional collocation point increases the dimension of the system by one equation, and increase of accuracy due to increase of the order of derivatives by one leads to the need of additional iteration, which is much more preferable. A mathematical tool has been developed that allows one to generate the coefficients of the calculation schemes for an arbitrary number of stages on a step, including a non-uniform arrangement of stage points.

Статья поступила в редакцию 16.04.2014.